

Title	前号浅野氏談話878ニ関スルー注意 （部分体ノ Arithmetic ニツイテ）
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 203 p.356-p.361
Issue Date	1940-10-15
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74811
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

881. 前号浅野氏談話878=関スル

—注意(部分体ノ arithmetic = ツイテ)

中山 正 (阪大)

前号ヲ浅野氏ハ「アル体 K ノ上ノ normal-simple ナ多元環 \mathcal{A} ノ中デ「普通」ノ arithmetic が成立シテキルナラバ K ノ中デモヤハリソウデアル。」コトヲ証明サレタ。

ソコノ証明デハ K ノ中ニアル valuation がアルトキ、ソレガ \mathcal{A} デ「Zerlegen」シタイトイフ normal-simple algebra = 特有ノ性質が使ハレテキルコトハ容易ニワカル。

シカラバソレハ方法的ナ問題カ、或ヒハ本質的ニ必要ナコトカ、即チ normal-simple デナイ場合、特ニ Extension field デアル場合ハ如何デアルカ、ニツイテハ始メヨク介リマセンデシタ。然レコノ場合、實際駄目デアルコトが容易ナ例デ示サレタノデ一寸御報告シマス。

即チ、任意ノ体 k = ニツノ独立ナ変数 x, y ヲ添加シテ $K = k(x, y)$ ヲツクル。更ニ \sqrt{x} ヲ添加シテ $L = K(\sqrt{x}) = k(\sqrt{x}, y)$ ヲツクル。 L ハ K ノニ次ノ拡大体デアル。今 L ノ中デ

$$O = k(y + \sqrt{x})[y]$$

ナレ整域ヲモハル。(角 カッコ ハ環添加ヲ表ハス)

\mathcal{O} は k 体 $k(y + \sqrt{x})$ 上、 y 、多項式環であるから、ソコデハ普通、arithmetic が成立ツ。シカレモ下ニ示ス如ク \mathcal{O} ト K 、Intersection ハ

$$\mathcal{O} \cap K = k[x, y]$$

ニナル。ソウスレバ ソコデハ普通、arithmetic ハ成立シナイ。故ニ求メル例ニナル。(勿論下ノ体デ云々ハ上ノ整域トノ intersection ナル整域デノ意味デアルコトハ云フマデモナイ)

$$K \cap \mathcal{O} \text{ヲモトメルタメニ、} K \text{ノ任意ノ元ハ } \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$$

ナル形ニカケル。但シ $F(x, y), G(x, y)$ ハ $k[x, y]$ ノ元デ、ソコニオイテ共通因子 (≠ 常数) ヲモクスモノトスル。他方 \mathcal{O} ノ元ハ $\frac{f(\sqrt{x}, y)}{g(\sqrt{x} + y)}$ ナル形ニカケル。

タビシ $f(\sqrt{x}, y) \in k[\sqrt{x}, y]$, $g(\sqrt{x} + y) \in k[\sqrt{x} + y]$, シカモ f ト g ハ $k[\sqrt{x}, y]$ ニオイテ共通因子ヲフクマヌトシテヨイ。今上記両者が等シイトスル。即チ

$$\frac{F}{G} = \frac{f}{g} \quad \text{即チ} \quad F \cdot g = f \cdot G$$

シカレモ $F(x, y)$ ト $G(x, y)$ ハ $k[x, y]$ ニオイテ共通因子ヲモクスノカカラ、 $k[\sqrt{x}, y]$ ニオイテモ共通因子ヲモクス事ハ容易ニワカル。ヨツテ兎ニ角

$$F(x, y) = f(\sqrt{x}, y), \quad g(\sqrt{x} + y) = G(x, y)$$

トナル。シカル $= \sqrt{x} + y$ ノ多項式ガ x, y ノ多項式 $=$ ナ
 ルノ、ハ常數ノ時ダケデアル。故ニ我々ノ元、即チ $K \cap \mathcal{O}$ ノ
 任意ノ元ハ x, y ノ多項式 \in 左 $[x, y]$ トナル。 *g. e. d.*

注意: 單ニ L/K 、 L = オイテ普通ノ arithmetic
 ガアルバカリデナク、ソノ整域 \mathcal{O} ガ L/K = オケルソ
 ノ共軛ト一致スルナラバ $K \cap \mathcal{O}$ デ普通ノ arithmetic
 ガ成立ツコトハ大シタ困難トシニシカル。タダシコトニ
 L/K ハ *galois'sch* トスル。(拡大スル方ハ
 arithmetic ガ保タレルコトガヨク知レテキルノガカ
 ラ、拡大スル方ハヨイノデアリ、従ツテ *galois'sch*
 ト仮定スルコトハ本質的ニハ何等影響ナイ。ソリデナイ
 場合ニ云ヒカヘルコトモ容易デアル)

[追記] ソレナラバ、 L/K ナル有限拡大体ニオイテ、
 L ノ整域 \mathcal{O} ガイルトキ $\mathcal{O} \cap K$ デ普通ノ arithmetic ガ
 成立ツタメノ 必要且ツ充分 ナ條件ハ?

ソレハ、 L ノ上ニ最後ニ述ベタコトカラ直グ出ルコ
 トダガ、ソノタメニハ再ビ L/K ガ *galois'sch* トシテ
 (上記注意参照) \mathcal{O} トソレノ共軛 $\mathcal{O}', \mathcal{O}'', \dots$ ノ
 Intersection $\mathcal{O}^* =$ オイテ普通ノ arithmetic ガ
 成立ツコトガ必要且ツ充分デアル。

(証明) $\mathcal{O} \cap K = \mathcal{O}' \cap K = \mathcal{O}'' \cap K = \dots$ デアル。
 従ツテコレハ同時ニマタ $= \mathcal{O}^* \cap K$ デアル。今コトデ普通
 ノ arithmetic ガ成立ツテキルトスレバ、 \mathcal{O}^* ハソレ(即
 チ $\mathcal{O}^* \cap K$) = 對シテ *ganz-abhängig* ナ L ノ元全

体デアル。何トナラバ $\mathcal{O}^* \cap K = \text{對シテ ganz-abb.}$ ナ
 元ハ $\mathcal{O}, \mathcal{O}', \mathcal{O}'', \dots = \text{對シテ 然リ}$ 。シタガッテソレ等ニ
 即チ $\mathcal{O}^* = \text{含マレル}$ 。他方 \mathcal{O}^* ノ元ノ共軛ノ整對稱式ハ
 $\mathcal{O}^* \cap K = \text{含マレルコト明カダカラ}$ \mathcal{O}^* ノ元ハ $\mathcal{O}^* \cap K =$
 對シテ ganz-abb. デアル。ヨツテ \mathcal{O}^* デ普通ノ arithmetic
 成立ツ。

逆ハ上ニベタコトカラ明カ。 \mathcal{O}^* ハソノ共軛ト一致
 スルカラ。(コノ必要充分條件ヲ使ヘバ前記反例ノ別証モ得
 ラレル。スナハチ、ソコノ \mathcal{O} トソノ共軛 \mathcal{O}' ノ Inter-
 section ハソコノ論法ト類似ノ論法デ $[\sqrt{x}, y]$ ナ
 ルコトガワカリ、ソコデハ普通ノ arithmetic 成立タ
 ナイ)。

ナホ、前ニ述べ且ツ上ニ使ッタ共軛ト一致スル場合云々
 ハ淺野サンハヤハリ前号 878 ト同ジ様ナ方法デ証明サレタ
 が、以下ニツノ別証ヲ述べテミル。

先ツ $\mathcal{O} = \text{オイテ 普通ノ arithmetic 成立ツコトハ}$

1. L ノ中ニ適當ノ valuations system \mathcal{G}_τ
 がアリ、 \mathcal{O} ガソノ valuations rings
 intersection.
2. \mathcal{G}_τ ハミナ discrete.
3. 任意ニ有限個ノ Stellen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ 及
 ビソレニ對應シテ L ノ元 a_1, \dots, a_n が與ヘラ
 レタトキ、 $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n = \text{オイテハ } a_1, \dots, a_n$
 ニ充テ近ク、シカシテ他ノ Stellen テハ ganz

ニナル如キ L ノ數カ存在スル。

ト同値デアル。(コノ *formulation* ハ *Artin* クラ聞
イタノデスガ非常ニ便利デアル。特ニ拡大体 (下カラ上ヘ)
ヲ論バルトキ *idealtheoretisch* ニヤルヨリハズツト
便利ノヤウニ思フ。ナホ、カウシタ行キ方ノモット一般ノ場
合ニツイテハ守屋氏が北大紀要ニ書イテ居ラレル)。

ヨツテ今 ϕ がソノ共軛ト一致スレバ、アル ϕ_c ト共軛
ナ *valuation* ハヤハリ上ノ *system* ノ中ニフクマレ
テキルコトハ明カデアル。

更ニ $K = O$ イテ ϕ_c デ *induce* サレタ *valuations*
ノ (中デ (本質的ニ) 異ルモノ) ナス *system* ϕ_α デ考
ヘル。ソレヲハ勿論 *discrete* ナカラ、ソレニツイテ
ニ相當スルコトが云ヘレバ目的が達セラレル。先ツ L/K が
separable ノ場合、コノ時 K ノ任意ノ元ハ L ノ元ノ
Spur デアル。

今一ツノ ϕ が與ヘラレタトキ、ソレヲ割ル (互ニ共軛
ナ) ϕ ニツイテ L ノ元ヲ適當ニ近似スレバソノ *Spur*
ハ與ヘラレタ K ノ元ニ ϕ デ充分近い。故ニ ϕ ノ性質が
 $\{\phi_\alpha\}$ ニツイテ保持サレルコトが容易ニワカル。次ニ
rein-inseparable ノ場合。 K ノ *Characteristic* ヲ p 。
シカレバ L ノ元ヲ p^e 乗スレバミナ K ニ
入ルトスル。今 K ノ中ニ近似サルベキ n 個ノ元が與ヘラレ
タトシテ、ソレノ p^e 乗根ヲミナ $L =$ 添加シタ体 L^* ヲ考
ヘル。コノデ普通ノ *arithmetic* が成立ツテキル。ヨツ

テ、ソレヲ p^e 乗根ヲ L^* ノ中デ近似スレバヨイ、(L^* 元
ハマハリ p^e 乗スレバミナ K ノ中ニ入ルコトニ注意セヨ)。
上記兩者ヲ合セレバ一般ノ場合ガ出来ル。